

基于泰勒中值定理的 QDDFS 超高压压缩比算法

赵占锋, 周志权, 乔晓林

(哈尔滨工业大学信息工程研究所, 黑龙江哈尔滨 150001)

摘 要: 基于泰勒中值定理, 提出了一种新的 QDDFS 压缩方法, 对于 32bits QDDFS 系统的压缩比可达到千万, 使整个系统集成在单片芯片内部成为可能. 针对本方案的性能进行了详细分析, 并对参数进行了优化选择. 最后给出了本系统的合理方案和实现简图.

关键词: QDDFS; 泰勒中值定理; 压缩比

中图分类号: TN919.3 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2008)01-0152-04

A QDDFS Method with Super High Compression Ratio Based on Taylor Median Theorem

ZHAO Zhan feng, ZHOU Zhi-quan, QIAO Xiao lin

(Institute of Information and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: A new QDDFS method of over ten millions' compression ratio is proposed based on Taylor median theorem, that makes one CMOS chip can store 32bit QDDFS system. The principle is analyzed and parameters are optimized. A reasonable scheme is put forward for the bottleneck of this system. Finally the whole architecture for proposed scheme is given.

Key words: QDDFS; Taylor median theorem; compression ratio

1 引言

DDFS 因其具有连续相位、频率变化快、频率分辨率高和信噪比高的诸多特点, 在航天、军事、民用等众多领域发挥了越来越大的作用. 在传统的正交调制和解调技术中, 采用移相器来获得正交的两路正弦余弦信号, 但往往存在不完全正交的问题. QDDFS 却能同时提供完全正交的正弦和余弦信号两路信号. 随着存储数据压缩比的增大、功耗的降低和输出频率的提高, DDFS 芯片在数字通信、无线通信和频率控制系统中应用越来越广.

DDFS 理论的提出是由 Tierney, Rader 和 Gold 在 1971 年提出的^[1], 主要思想是将 $0 \sim 2\pi$ 的正弦值(或余弦值)量化后存储在 ROM 中, 利用相位累加器产生的数字序列作为地址, 对 ROM 查表获得正弦(或余弦)波形, 地址、相位和振幅三者之间完全对应的关系. 图 1 给出了 DDFS 的原理简图, 图中的输出 $\sin(2\pi n/2^L)$ 是离散正弦信号, 经过 D/A 转换器和低通滤波器之后得到模拟正弦信号.

令 f_{clk} 表示系统时钟频率, f_{out} 表示输出的合成信号频率, L 表示相位累加器字长, FCW (Frequency Control

Word) 频率控制字, 则输出频率的表达式为:

$$f_{out} = \frac{f_{clk} FCW}{2^L} \quad 0 \leq FCW \leq 2^{L-1} \quad (1)$$

系统最小输出频率为:

$$f_{min} = \frac{f_{clk}}{2^L} \quad (2)$$

对于一个 L bits 的数字系统, 如果量化误差为 $\pm 2^{-1}$ bit, 则系统的量化信噪比为 $20\log(2^{L+1})$ dB, 它是该系统的极限信噪比, 实际系统的信噪比要比它低. 所以为了提高系统的信噪比系统量化的比特数越来越高从 16bits、24bits 增加到了 32bits. 对于 16bits、24bits 和 32bits 的 DDFS 系统直接存储的数据就是 128Kbytes, 和 48Mbytes, 16Gbytes ($4Gwords \times 4Bytes/word \times 8Bits/byte = 128Gbits$). 对于这么大的数据表, 如果简单的存储到芯片中, 芯片功耗非常大、资源利用率也不高.

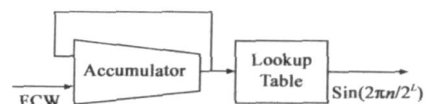


图 1 DDFS 原理图

鉴于数据表的庞大, 众多的研究者开始研究数据表的压缩技术.

1984年 David 在他的论文中提出了三角逼近算法^[2], 其压缩比率为 11.7:1.

1988年 Henry T. Nicholas, Henry Samuelli 和 Bluce Kim 等人提出了 sine phase difference technique^[3], 将压缩比提高到 13.5:1.

1997年中国台湾的学者 Shyuan Liao 和 Liang-Gee Chen^[4], 对文献[3]进行了改进, 将压缩比提高到 236:1.

2001年 Curticepan 等人^[5]将三角逼近算法进行了改进, 将压缩比提高到 455:1.

2005年林茂六等人^[6]在 Shyuan Liao 和 Curticepan 的工作基础上, 将三角逼近算法和 Sine-Phase Difference Algorithm 两者相结合, 压缩比为 565:1.

作者本人将三角逼近算法和非线性逼近算法结合^[7], 在 SFDR 为 93.54dBc 时, 压缩比也仅仅能达到 762:1 (数据量计算公式为 $(2l-13)2^{q-3-p} + n2^{p-1}$).

在某些特殊的应用领域, 系统的信噪比要求很高, 这就要求提高系统的量化比特位数. 例如 32bits 的 QDDFS 系统, 由于以上压缩方法的压缩效率很低, 很难达到理想的效果. 因此本文针对这个问题, 提出了一种超千万压缩比的压缩方法. 该方法可以将 16GBytes 数据压缩为 1632Bytes. 使得该系统可以在一片芯片中集成, 降低系统了功耗.

2 超高压压缩比原理

2000年, Abdellatif Bellaouar 和 Michael S. O'brecht 等人^[8]提出了基于以下公式的压缩算法:

$$\sin\theta = \sin\theta_i + \alpha(\theta - \theta_i) + \delta_{\sin} \quad (3)$$

$$\cos\theta = \cos\theta_i + \beta(\theta - \theta_i) + \delta_{\cos} \quad (4)$$

$$\delta_{\sin} = -\frac{1}{2}\sin\theta_i * (\theta - \theta_i)^2 \quad (5)$$

$$\delta_{\cos} = -\frac{1}{2}\cos\theta_i * (\theta - \theta_i)^2 \quad (6)$$

仔细观察式(3)和(4), 会发现如果将 α 和 β 替换为 $\cos\theta$ 和 $-\sin\theta$ 这样就与泰勒公式完全的一样.

重新来观察一下 2001年 Curticepan 等人的三角逼近算法见式(7)和(8), 如果将公式中的 $\sin B$ 替换为 $\theta - \theta_i$ 就是泰勒公式.

$$\sin(A+B) \approx \sin A + \cos A \sin B \quad (7)$$

$$\cos(A+B) \approx \cos A - \sin A \sin B \quad (8)$$

这是巧合吗? 当然不是, 直接用泰勒公式的压缩正弦数据表算法终于在 2005 年被 Usman Hai, Muhammad Nadir Khan 和 Muhammad Saad Imran 等人提出来用于产生正弦波形, 并利用了正弦和余弦函数的对称性, 将式(9)修正为了式(10):

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + (\theta - \theta_0) * \cos\theta_0 \quad (9)$$

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + (\theta - \theta_0) * \sin(\pi/2 - \theta_0) \quad (10)$$

综上所述, 这些算法都和泰勒公式的有着千丝万缕的关系, 那我们重新分析一下泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0) * (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} * (x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} * (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} * (x - x_0)^n + \delta \quad (11)$$

$$\delta = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x - x_0)^{n+1} \quad (12)$$

由于 $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, 以前人们仅仅考虑了前两项来进行正弦和余弦数据表的压缩, 如果利用第三项, 是不是可以提高压缩比, 是不是能提高很多呢? 现在只考虑泰勒公式的前三项, 得到公式(13)和(14):

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + \Delta x) &\approx \sin(x_0) + \cos(x_0) * \Delta x \\ &\quad - \frac{1}{2}\sin(x_0) * (\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \cos(x_0 + \Delta x) &\approx \cos(x_0) - \sin(x_0) * \Delta x \\ &\quad - \frac{1}{2}\cos(x_0) * (\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

观察以上两公式, 可以看出仅仅存储 $\sin(x_0)$ 和 $\cos(x_0)$, 而 Δx 和 $(\Delta x)^2$ 通过计算压缩比就可以大幅度提高.

3 系统性能分析

3.1 峰值信噪比

数字系统由于量化产生的误差为该系统的最小误差, 其值为 $\frac{1}{2}LSB$, 则 32bit 的系统的误差信噪比为:

$$SNR_{p,p} = 20\lg(2^{33}) = 198.68\text{dB} \quad (15)$$

该值可以作为系统信噪比的一个衡量尺度, 系统的其它误差可以和该值比较, 从而判断分析系统的性能和优化参数.

设 p 条低位地址线用于生成 Δx 见图 2, 则泰勒公式余项误差可由式(12)(16)和(17)得到:

$$\Delta x = \frac{2\pi * 2^p}{2^{32}} \quad (16)$$

$$\delta_{\max} = -20\lg \left[\left| \frac{\left(\frac{2\pi * 2^p}{2^{32}} \right)^3}{3!} \right| \right] \text{dB} \quad (17)$$

从该表 1 可以简单表 1 泰勒余项误差产生的信噪比的‘推测’一下, 由于 p 等于 19bits 时, 泰勒公

p (bits)	19	20	21
δ_{\max} (dB)	202.48	184.41	166.35

式余项产生的误差已经小于 $SNR_{p,p}$, 所以实际系统 p

小于 19bits 是没有意义的, 实际取值可以大于等于 19bits.

三角近似法的压缩后数据量估计公式为: $(2l - 2) \cdot 2^{q-3-p} + n2^{p-1}$ bits, 由于本文方法不需要存储第二项, 而是通过计算得到的, 可以推出三角近似算法和泰勒公式展开法结合后的数据量估算公式为: $(2l - 2) \cdot 2^{q-3-p}$ bits, 如果取 $l = 32, q = 32, p = 20$, 则压缩后数据为 3.878KBytes; 而压缩前数据为 16GBytes, 压缩比为 4329604:1, 采用作者本人在文献[7]中的方法结合泰勒公式展开法的压缩数据计算公式为: $(2l - 13) \cdot 2^{q-3-p}$ bits, 压缩后数据为 3.1875KBytes, 压缩比为 5263440:1; 特别是当如果 $p = 21$ 时, 压缩比超过了 1 千万, 压缩后数据只有 1632Bytes. 表 2 给出了用泰勒公式法和文献[4, 5, 7]相结合应用后的压缩效果.

表 2 压缩效果及比较

结合方法	$l = 32, q = 32$	Size(Bytes)	压缩比
$(2l - 2)2^{q-3-p}$	$p = 20$	3.878K	4329604:1
文献[5]	$p = 21$	1.9375K	8659208:1
$(2l - 9)2^{q-3-p}$	$p = 20$	3.4375K	4880645:1
文献[6]	$p = 21$	1.71875K	9761289:1
$(2l - 13)2^{q-3-p}$	$p = 20$	3.1875K	5263440:1
作者的非线性逼近方法	$p = 21$	1.59375K	10526880:1

3.2 信噪比

系统的性能评价往往从功率的角度入手; 假设不采用任何压缩方法, LUT ROM 中存储了一个周期内的所有数据. 这种情况下, 系统仅仅存在截断误差, 该信噪比可以被认为系统的最大信噪比, 公式(18)给出了 32bit 系统的噪声方差计算公式:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2^{30}} \sum (\sin\theta - [\sin\theta]_{31})^2 \quad (18)$$

$\sin\theta$ 表示用 MATLAB 计算的数据作为理想的正弦值, $[\sin\theta]_{31}$ 表示小数点后保留 31bits, 由于整个正弦周期是利用正余弦对称性来产生的, 所以整个周期的方差和 $0 \sim \pi/4$ 之间的正弦和余弦函数的数据的方差是一样的.

对于振幅为 A 的系统, 信号平均功率为 $A^2/2$, 这里 $A = 1$, 则系统的信噪比可由式(19)计算:

$$SNR_{max} = 10 * \lg(\sigma^2/0.5) = 10 * \lg(2\sigma^2) = 188.3997\text{dB} \quad (19)$$

系统的实际信噪比可以通过公式(18)、(19)、(20)和(21)来计算, $[\cdot]_{31}$ 表示小数点后保留 31 位二进制数据.

$$[\sin(x_0 + \Delta x)]_{31} \approx \{[\sin(x_0)]_{31} + [[\cos(x_0)]_{31}[\Delta x]_{31}]_{31} - [\frac{1}{2}[\sin(x_0)]_{31} * [([\Delta x]_{31})^2]_{31}]_{31}\} \quad (20)$$

$$[\cos(x_0 + \Delta x)]_{31} \approx \{[\cos(x_0)]_{31} - [[\sin(x_0)]_{31}[\Delta x]_{31}]_{31}$$

$$- [\frac{1}{2}[\cos(x_0)]_{31} * [([\Delta x]_{31})^2]_{31}]_{31}\} \quad (21)$$

经过 MATLAB 仿真计算, 当 $p = 21$ 时, 信噪比为 184.2450dB, 信噪比和压缩比达到最佳. 随着 p 的增大, 由泰勒中值定理, 该余项增大, 信噪比急剧下降详见表 3.

表 3 不同 p 值下的 SNR

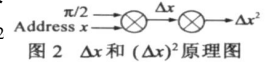
p (bits)	SNR(dB)
21	184.2450
22	175.9926
23	156.9453

通过仿真计算, 本文认为 $p = 21$ bits 为最佳选择.

4 系统瓶颈

分析整个系统可以发现, Δx 和 Δx^2 的计算延时是很大的, 它是制约系统提高速度的主要因素. 所以这里针对这个问题, 这里提出了一个合理的解决方案:

(1) 相位可以表示为 $\frac{\pi}{2} * x$, x 表示将地址线的看成的小数, 其范围为 $[0, 4)$, 参见文献[7], 则生成 Δx 和 Δx^2 的原理图如图 2.



(2) 由于乘法器的计算时间延迟比较大, 这是影响整个系统速度的瓶颈, 为了快速计算可以将图 2, 作为功能子单元, 由 2 个、4 个或者更多来形成并行计算模块, 同时增加一个相位预测器代替相位累加器, 该相位预测器提前预测出各个子运算单元需要计算的数值, 这样可以提高整个系统的性能. 如图 3 给出了两个子运算的情况, 设 x 为低位地址线表示的数据, x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示不同时刻的数据; $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ 表示不同的时刻, 且设一级乘法器的计算时间为 $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, 在图 4 中, t_1 时刻相位预测器输出 x_1 , t_2 时刻给输出 x_2 , 从 t_3 时刻开始预测器输出 x_3 , 同时子运算单元 1 输出 x_1 的计算结果 Δx_1 和 Δx_1^2 , t_4 时刻预测器给出 x_4 子运算单元 2 输出 x_2 的计算结果 Δx_2 和 Δx_2^2 .

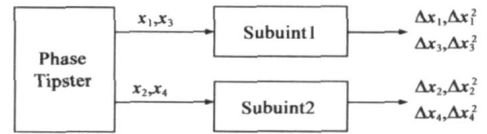


图 3 Δx 和 $(\Delta x)^2$ 实现框图

图 4 仅给出了两个子运算单元工作的情况. 实际系统中由于乘法计算需要的时间很长, 可以增加子运算

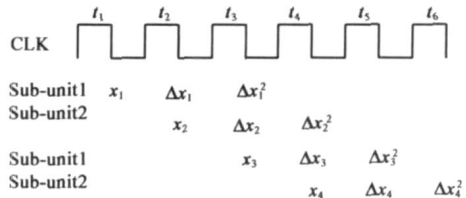


图 4 子运算单元时序图

单元的数量, 从而降低对整个系统的影响, 现有的高端 FPGA 芯片中乘法器往往有几十到几百个, 上述算法是完全可以做到的. 图 5 为系统的结构简图.

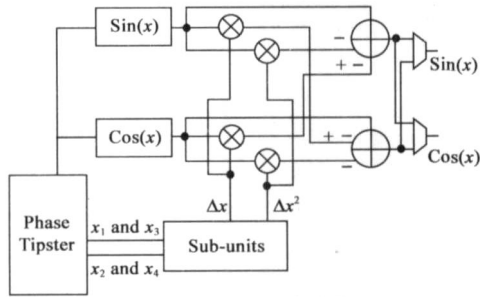


图 5 系统结构简图

5 结论

本文利用泰勒中值定理结合文献[7], 将 QDDFS 的 LUT ROM 压缩率从目前的几百提高到了上千万以上; 针对其中的参数进行了优化, 试验表明当 $p = 21$ 时, 压缩比和信噪比达到最佳; 针对系统的瓶颈提出了一套合理的可实现方案. 该方案中用相位预测器取代了原来 QDDFS 系统中的相位累加器, 使得 QDDFS 构架发生变化.

通过该方法, 可以将原来 16GBytes 的数据压缩到只有 1632Bytes, 使得一片 CMOS 芯片便可以集成整个的系统, 这对于原来的算法是难以实现的.

基于目前 32bits 数模转换器速度比较低的情况, 该方法可用于超低频、超高分辨率和超高稳定度的信号源中.

该方法的出现, 对高速 32 bits 数模转换器的制造技术和超高分辨率信号源提出了一种需求.

参考文献:

- [1] J Tierney, C M Rader, B Gold. A digital frequency synthesizer [J]. IEEE Transactions on Audio Electroacoust, 1971, AU-19 (1): 48- 57.
- [2] D ASunderland, R A Strauch, S S Wharfiled, H T Peterson, C R Cole. CMOS/ SOS frequency synthesizer LSI circuit for spectrum communications[J]. IEEE J Solid State Circuit, 1984, SC-19(8): 497- 505.
- [3] H T Nicholas, III, H Samuelli, B Kim. The optimization of di-

rect digital frequency synthesizer performance in the presence of finite word length effect [A]. In Proc IEEE 42nd Annual Frequency Control Symposium [C]. Baltimore: IEEE Press, 1988. 357- 363.

- [4] Shyuan Liao, Liang Gee Chen. A low power low voltage direct digital frequency synthesizer [A]. Proc Int Symp VLSI Systems [C]. Technology and Application, 1997. 265- 296.
- [5] F Curticapean, K I Palomaki, J Naittylahti. Direct digital frequency synthesizer with high compression ratio [J]. Electronics Letters, 2001, 37(21): 1275- 1276.
- [6] Maoliu Lin, Qinghua Xu, Xiaohui Qi. Quadrature direct digital frequency synthesizers with super high memory compression ratio and its parameter optimization [A]. Proceedings of IEEE International Symposium on Communications and Information Technology (ISCIT) [C]. IEEE Press, 2005, 1134- 1137.
- [7] 赵占锋, 周志权, 乔晓林. 基于非线性逼近法的 QDDFS 新构架 [J]. 电子学报, 2007, 35(1): 1- 3.
ZHAO Zhan feng, ZHOU Zhi quan, QIAO Xiao lin. A new QDDFS architecture base on nonr linear approach [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(1): 1- 3. (in Chinese)
- [8] Usman Hai, Muhammad Nadir Khan, Muhammad Saad Imran, Muhammad Rehan. Compressed ROM high speed direct digital frequency synthesizer architecture [A]. The 17th International Conference on Microelectronics (ICM) [C]. IEEE Press, 2005, 36- 39.

作者简介:



赵占锋 男, 1980 年生于河北辛集, 哈尔滨工业大学信息工程研究所博士研究生. 主要研究方向嵌入式系统设计、数字图像处理、现代质谱技术. E-mail: zhao_zhan_feng@yahoo.com.cn

周志权 男, 1973 年生于辽宁铁岭, 哈尔滨工业大学信息研究所博士、副教授. 主要研究方向数字图像处理、多媒体通信、现代质谱技术.

乔晓林 男, 1948 年生于内蒙古赤峰, 哈尔滨工业大学信息工程研究所所长、教授、博导. 主要研究方向现代信号处理技术、极化信号处理技术、雷达技术.